Zanimljivosti kod dokazivanja nekih nejednakosti pomoću matematičke indukcije

Šefket Arslanagić[1]

U ovome radu bavit ćemo se dokazivanjem nejednakosti u kojima se na lijevoj strani pojavljuje zbroj od n razlomaka u kojima se nalazi $n \in \mathbb{N}$. Prvi primjer bit će nejednakost sa znakom „≥" i vidjet ćemo da tu nema problema s primjenom matematičke indukcije.

Primjer 1. Dokažimo nejednakost

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+n}\geq\frac{11}{30},$$

gdje je $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Dokaz:

1° Za $n = 2$ dobivamo $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\geq\frac{11}{30}$, tj. $\frac{11}{30}\geq\frac{11}{30}$, što je točno (vrijedi jednakost).

2° Pretpostavimo da je nejednakost točna za $n = k \geq 2$, tj.

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}+\ldots+\frac{1}{2k+k}\geq\frac{11}{30}. \tag{1}$$

3° Pokažimo da je dana nejednakost točna i za $n = k + 1$, tj.

$$\frac{1}{2(k+1)+1}+\frac{1}{2(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)+(k+1)}\geq\frac{11}{30}. \tag{2}$$

Dodajmo sada lijevoj i desnoj strani nejednakosti (1) izraz

$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2};$$

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

dobivamo

$$\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+4}+\ldots+\frac{1}{3k+3}\geq\frac{11}{30}+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}. \quad (3)$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0. \quad (4)$$

Imamo

$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+3}=\frac{1}{(3k+2)-1}+\frac{1}{(3k+2)+1}=\frac{2(3k+2)}{[(3k+2)-1][(3k+2)+1]}=$$

$$=\frac{2(3k+2)}{(3k+2)^2-1}=\frac{2(3k+2)}{9k^2+12k+3}>\frac{2}{3k+2},$$

tj. zbog

$$\frac{2(3k+2)}{9k^2+12k+3}>\frac{2}{3k+2}/:2$$

$$\Leftrightarrow (3k+2)^2>9k^2+12k+3$$

$$\Leftrightarrow 4>3 \text{ (točno)},$$

vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+3}>\frac{2}{3k+2},$$

odnosno

$$\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}>\frac{3}{3k+2}. \quad (5)$$

Dokažimo još da vrijedi njednakost

$$\frac{3}{3k+2}>\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}, \quad (6)$$

odnosno

$$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{3}{3k+2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2k+2)(3k+2)+(2k+1)(3k+2)-3(2k+1)(2k+2)}{(2k+1)(2k+2)(3k+2)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6k^2+10k+4+6k^2+7k+2-12k^2-18k-6}{(2k+1)(2k+2)(3k+2)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-k}{(2k+1)(2k+2)(3k+2)}<0 \text{, što je točno.}$$

Sada iz (5) i (6) slijedi nejednakost (4).

Zbog nejednakosti (4) iz nejednakosti (3) slijedi nejednakost (2), q.e.d.

4° Dakle, dana nejednakost točna je za sve $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Ovdje smo bez nekih većih problema uspjeli dokazati danu nejednakost sa znakom „≥". No, problem nastupa ako želimo dokazati direktno pomoću matematičke indukcije nejedankost sa znakom „<" gdje se na desnoj strani nejednakosti nalazi neki broj. Dat ćemo tri primjera takvih nejednakosti i pokazati kako se to ipak može učiniti.

Primjer 2. Dokažimo nejednakost

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1, \tag{7}$$

gdje je $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Ovdje problem nastaje kada hoćemo dokazati korak indukcije za $n = k + 1$, tj.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<1+\frac{1}{(k+1)^2},$$

jer $1+\frac{1}{(k+1)^2}$ nije manje od 1 nego vrijedi $1+\frac{1}{(k+1)^2}>1$;($k>1;\ k\in\mathbb{N}$).

Što trebamo učiniti želimo li koristiti matematičku indukciju?

Dokazat ćemo nejednakost (8), jaču od dane nejednakosti (7), a koja glasi

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}, \tag{8}$$

gdje je $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$.

1° Za $n = 2$ dobivamo $\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2}$, tj. $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$, što je točno.

2° Neka je dana nejednakost (8) točna za $n = k \geq 2$, tj. vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k}.$$

3° Za $n = k + 1$ imamo nejednakost

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}. \tag{9}$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi nejednakost

$$1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k+1} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+1)-(k+1)^2+k}{k(k+1)^2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{k(k+1)^2}<0,$$

što je točno.

Sada iz (9) i (10) dobivamo nejednakost

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k+1}, \text{ q.e.d.}$$

4° Dakle, dana nejednakost (8) je točna.

Budući da je $1-\frac{1}{n}<1;\ (n>1,\ n\in\mathbb{N})$, to je točna i dana nejednakost (7).

Napomena 1. Dat ćemo i dokaz nejednakosti (8) ne koristeći matematičku indukciju.

Kako je $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}$, tj. $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, to za k = 2, 3..., n redom dobivamo:

$$\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1},$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti dobiva se

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

odnosno

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}, \text{ q.e.d.}$$

Primjer 3. Dokažimo nejednakost

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}, \tag{11}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Kao i u prethodnome primjeru, ne dolazi u obzir matematička indukcija jer za $n = k + 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{(2k+3)^2} > \frac{1}{4};\ (k \in \mathbb{N}).$$

Dokazat ćemo nejednakost (12), jaču od nejednakosti (11), a koja glasi

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)};\ (n \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

1° Za $n = 1$ dobivamo $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$, tj. $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$, što je točno.

2° Neka je nejednakost (12) točna za $n = k \geq 1$, tj. vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{4(k+1)}.$$

3° Za $n = k + 1$ imamo nejednakost

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{4(k+1)}+\frac{1}{(2k+3)^2}. \qquad (13)$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4(k+1)}+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{4(k+2)} \qquad (14)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4(k+2)}-\frac{1}{4(k+1)}+\frac{1}{(2k+3)^2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)(2k+3)^2-(k+2)(2k+3)^2+4(k+1)(k+2)}{4(k+1)(k+2)(2k+3)^2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)\left(4k^2+12k+9\right)-(k+2)\left(4k^2+12k+9\right)+4\left(k^2+3k+2\right)}{4(k+1)(k+2)(2k+3)^2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4k^2-12k-9+4k^2+12k+8}{4(k+1)(k+2)(2k+3)^2}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{4(k+1)(k+2)(2k+3)^2}<0,$$

što je točno.

Sada iz (13) i (14) dobivamo nejednakost

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{4(k+2)}, \text{ q.e.d.}$$

4° Dakle, dana nejednakost (12) je točna.

Budući da je $\frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)}<\frac{1}{4}; \left(n\in\mathbb{N}\right)$, to je točna i dana nejednakost (11).

Napomena 2. Dat ćemo još i dokaz nejednakosti (12) bez korištenja matematičke indukcije. Koristit ćemo nejednakost

$$\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4k}-\frac{1}{4(k+1)};\ \left(k\in\mathbb{N}\right),$$

$$\left(\Leftrightarrow 0<1\right), \text{ tj.}$$
$$\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Odavde za k = 1, 2, ..., n redom dobivamo:

$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{5^2}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti dobivamo:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}<\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right), \text{ tj.}$$
$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}<\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

odnosno

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}<\frac{1}{4}-\frac{1}{4\left(n+1\right)}, \text{ q.e.d.}$$

Primjer 4. Dokažimo da za sve $n\in\mathbb{N}$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{n}}<2. \tag{15}$$

Dokaz: Ni ovdje za dokazivanje nejednakosti (15) ne možemo koristiti matematičku indukciju jer za $n = k + 1$ vrijedi nejednakost

$$2+\frac{1}{\left(k+2\right)\sqrt{k+1}}>2;\ \left(k\in\mathbb{N}\right).$$

Naravno, mi ćemo dokazati nejednakost (16), jaču od nejednakosti (15), tj. pomoću matematičke indukcije dokazat ćemo nejednakost:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{n}}<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}};\ \left(n\in\mathbb{N}\right). \tag{16}$$

1° Za $n = 1$ dobivamo $\frac{1}{2\sqrt{1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$, tj. $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$, što je točno.

2° Neka vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{k+1}};\ (k \in \mathbb{N}).$$

3° Za $n = k + 1$ imamo nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}}. \quad (17)$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi nejednakost

$$2 - \frac{2}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{k+2}}. \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{k+2}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{k+2}\cdot\sqrt{k+1} - 2(k+2) + 1}{(k+2)\sqrt{k+1}} < 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{k+2}\cdot\sqrt{k+1} < 2k+3 \,/^{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(k+2)(k+1) < 4k^2 + 12k + 9$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 + 12k + 8 < 4k^2 + 12k + 9$$

$\Leftrightarrow 8 < 9$, što je točno.

Sada iz (17) i (18) dobivamo nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{k+2}}, \text{ q.e.d.}$$

4° Dakle, dana nejednakost (16) je točna.

Napomena 3. Dat ćemo još jedan dokaz nejednakosti (15) ne koristeći matematičku indukciju.

Neka je

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}.$$

Imamo

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot 3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{2\cdot(n+1)\sqrt{n}}. \tag{19}$$

Kako je $2\sqrt{k+1}>\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$, to vrijedi

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}. \tag{20}$$

Zbog nejednaosti (20) iz (19) slijedi:

$$\frac{1}{2}S<\frac{1}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}S<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\text{ tj.}$$

$$S<2-\frac{2}{\sqrt{n+1}},\text{ q.e.d.}$$

Odavde očigledno slijedi $S < 2$.

Literatura

1. Arslanagić, Š., *Matematička indukcija*, Otisak, Sarajevo, 2001.
2. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
3. Sedrakajan, N. M., Avojan, A. M., *Neravenstva. Metodi dokazateljstva*, Fizmatlit, 2002.